

بسم الله الرحمن الرحيم

کلاس نکته و تست
نظریه زبان ها و ماشین ها

ابوالفضل گیلک

جلسه هفدهم – فصل هشتم

خصوصیات بستاری زبان های مستقل از متن

تست 17 تا 43

حل تست های 15 سال اخیر

ارشد – دکتری

مهندسی کامپیوتر – علوم کامپیوتر

فصل 8

خصوصیات بستاری زبان‌های مستقل از متن

تست 17 تا 43

17- در مورد زبان $L = \{a^m cb^n \mid m \neq n\} \cup \{a^m db^{2m} \mid m \geq 0\}$ ، کدام گزینه نادرست است؟ (مهندسی کامپیوتر - 86)

- (1) هر همومرفیسم L با یک PDA معین شناسایی می‌شود.
- (2) یک گرامر غیرمبهم برای زبان L موجود است.
- (3) یک PDA نامعین برای شناسایی L موجود است.
- (4) همه موارد

18- کدام یک از زبان‌های زیر مستقل از متن است؟ (مهندسی کامپیوتر - 83)

- (1) $L = \{a^{n^2} \mid n = 3k\}$
- (2) $L = \{a^{2^n} \mid n = 3k\}$
- (3) $L = \{a^n \mid n \geq 100\}$ یا n عدد اول
- (4) هیچ کدام

19- اگر $|w|_i$ تعداد حرف i در کلمه w باشد، آنگاه کدام گزاره در مورد زبان $L = \{w \in \{0,1\}^* : |w|_0 = f(|w|_1)\}$ که در آن $f(n) = n \bmod 5$ صحیح‌تر است؟ (علوم کامپیوتر - 85)

- (1) مستقل از متن است.
- (2) متناهی است.
- (3) مستقل از متن نیست.
- (4) وابسته به متن است ولی مستقل از متن نیست.

20- زبان $L_f = \{l^{f(n)} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{1\}^*$ که در آن $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ تابعی صعودی است، (علوم کامپیوتر - 85)

- (1) برای هر تابع محاسبه‌پذیر و صعودی f منظم است.
- (2) برای هر انتخاب تابع f منظم است.
- (3) چنانچه مستقل از متن باشد حتماً منظم نیز هست.
- (4) برای هر تابع محاسبه‌پذیر صعودی f مستقل از متن است.

21- کدام زبان مستقل از متن نیست؟ (علوم کامپیوتر - 84)

- (1) $\{a^n ba^n ba^n : n \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^*$
- (2) $\{w : |w| \equiv 2 \pmod{5}\} \subseteq \{a, b\}^*$
- (3) $\{a^{m+3} b^{2m+1} : m \geq 0\} \cup \{a^{3m+1} b^{2m} : m \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^*$
- (4) $\{w : w \neq w^R\} \subseteq \{a, b\}^*$

22- کدام یک از دلایل زیر برای این که نشان دهیم زبان L منظم نیست کافی است؟ (مهندسی کامپیوتر - 85)

- (1) عدد ثابت مثل n وجود دارد به طوری که برای هر رشته $z \in L$ ، $|z| \geq n$ داشته باشیم:
 $z = uvwxy, |vx| \neq 0, |vwx| \leq n, \forall i \geq 0 \quad uv^iwx^i y \in L$
- (2) عدد ثابت مثل n وجود دارد به طوری که برای هر رشته $z \in L$ ، $|z| \geq n$ داشته باشیم:
 $z = xyw, |y| \neq 0, |xy| \leq n, \forall i \geq 0 \quad xy^i w \in L$
- (3) هیچ عدد ثابت مثل n وجود ندارد به طوری که برای هر رشته $z \in L$ ، $|z| \geq n$ داشته باشیم:
 $z = uvwxy, |vx| \neq 0, |vwx| \leq n, \forall i \geq 0 \quad uv^iwx^i y \in L$
- (4) هیچ کدام

23- فرض کنید G گرامری مستقل از متن باشد که الفبای آن تک نمادی است، آنگاه $L(G)$ ، (مهندسی کامپیوتر - 81)

- (1) ممکن است نامنظم باشد.
- (2) ممکن است ذاتاً مبهم باشد.
- (3) همواره زبانی منظم است.
- (4) همواره زبانی نامتناهی است.

24- کدام گزینه در مورد زبان‌های زیر صادق است؟

(مهندسی کامپیوتر - 80)

$$\begin{aligned} L_1 &= a^n b^j a^j a^n \\ L_2 &= a^n b^j a^k a^l \quad n+j \leq k+l \\ L_3 &= a^n b^j a^k a^l \quad n \leq k, j \leq l \\ L_4 &= a^n b^m c^l \quad m = n+l \end{aligned}$$

- (1) زبان L_2 و L_3 مستقل از متن نیستند ولی زبان L_1 و L_4 مستقل از متن هستند.
- (2) زبان L_3 و L_4 مستقل از متن نیستند ولی زبان L_1 و L_2 مستقل از متن هستند.
- (3) زبان L_1, L_3 و L_4 مستقل از متن هستند ولی زبان L_2 مستقل از متن نیست.
- (4) زبان L_3 مستقل از متن نیست ولی زبان L_1, L_2 و L_4 مستقل از متن هستند.

25- فرض کنید:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^n c^j : n \leq j, n, j \geq 0\} \\ L_2 &= \{a^n b^j a^k b^l : n+j \leq k+l, n, j, k \geq 0\} \end{aligned}$$

(علوم کامپیوتر - 81)

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

- (1) L_2 زبانی مستقل از متن است ولی L_1 مستقل از متن نیست.
- (2) L_1 زبانی مستقل از متن است ولی L_2 مستقل از متن نیست.
- (3) L_1 و L_2 هر دو مستقل از متن می‌باشد.
- (4) L_1 و L_2 هر دو مستقل از متن نمی‌باشد.

26- در میان زبان‌های L_1, L_2 و L_3 زبان‌های مستقل از متن کدامند؟ ($|w|_x$ به معنای تعداد x های موجود در رشته w می‌باشد)

(مهندسی کامپیوتر - 79)

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^m c^n : n \geq m \geq 0\} \\ L_2 &= \{w \in \{a, b, c\}^* : |w|_a = |w|_b\} \cap \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0\} \\ L_3 &= L_1 \cup \{a^i b^j c^i : j > i \geq 0\} \end{aligned}$$

- (1) L_1 و L_3 (2) L_1 و L_2 (3) L_2 و L_3 (4) هر سه زبان

27- فرض کنید عبارت منظم $(0+01)^*$ زبان منظم L را نشان می‌دهد و w^R نمایانگر معکوس رشته w است. زبان

(مهندسی کامپیوتر - 78)

$$L' = \{w \in L \mid w = w^R\}$$

- (1) حساس به متن نیست.
- (2) مستقل از متن است ولی منظم نیست.
- (3) حساس به متن است ولی مستقل از متن نیست.
- (4) منظم است.

28- برای این که ثابت کنیم که L یک زبان مستقل از متن نیست، شرایط کافی کدامند؟

(مهندسی کامپیوتر - 78)

- الف- زبانی منظم وجود داشته باشد که از اشتراک آن با L زبانی منظم به وجود نیاید.
 - ب- زبانی مستقل از متن وجود داشته باشد که از اجتماع آن با L زبانی مستقل از متن به وجود نیاید.
 - ج- زبانی مستقل از متن وجود داشته باشد که از اشتراک آن با L زبانی مستقل از متن به وجود نیاید.
- (1) ب و ج (2) الف و ج (3) فقط الف (4) فقط ب

29- فرض کنید:

$$L_1 = \{a^p b^q a^p b^s \mid p, q, s \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^p b^p a^r b^s \mid p, r, s \geq 0\}$$

$$L_3 = \{a^p b^q a^r b^p \mid p, q, r \geq 0\}$$

(مهندسی کامپیوتر - 77)

کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- (1) L_1 یک زبان مستقل از متن (context free) می‌باشد. (2) L_3 یک زبان مستقل از متن نمی‌باشد.
 (3) L_2 یک زبان مستقل از متن نمی‌باشد. (4) $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ یک زبان مستقل از متن می‌باشد.

(مهندسی کامپیوتر - 84)

30- در مورد انواع زبان‌های مستقل از متن کدام گزینه صحیح است؟

- (1) زبان‌های مستقل از متن قطعی تحت عمل اجتماع بسته نیستند.
 (2) زبان‌های مستقل از متن قطعی تحت عمل اشتراک بسته‌اند.
 (3) زبان‌های مستقل از متن تحت عمل اشتراک با زبان‌های مستقل از متن قطعی بسته‌اند.
 (4) زبان‌هایی که برای آن‌ها گرامر مستقل از متن مبهم وجود دارد تحت عمل اجتماع بسته نیستند.

(مهندسی کامپیوتر - 86)

31- ثابت Pumping Lemma برای زبان‌های مستقل از متن با گرامر $G = (S, V, T, P)$ کدام است؟

- (1) تعداد واژه‌های زبان در T (Terminals)
 (2) تعداد واژه‌های نحوی در V (Nonterminals)
 (3) تعداد قواعد تولید در P (Production rules)
 (4) هیچ کدام

(علوم کامپیوتر - 88)

32- کدام یک از زبان‌های زیر مستقل از متن است؟

- (1) $L = \{a^n b^m c^k \mid k = |n - m|\}$
 (2) $L = \{a^n b^m c^k \mid n = m \text{ یا } m \leq k\}$
 (3) $L = \{a^n b^m c^k \mid k = mn\}$
 (4) موارد 1 و 2 هر دو صحیح‌اند.

(علوم کامپیوتر - 85)

33- همه زبان‌های زیر مستقل از متن هستند به جز:

- (1) $L = \{a^n b^n c^m \mid n \geq 0, m \geq 0\} \cap \{a^{2n} b^{2n} c^{2m} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$
 (2) $L = \{a^n b^{2n} c^m \mid n \geq 0, m \geq 0\} \cap \{a^n b^m c^{2m} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$
 (3) $L = \{a^{2n} b^n c^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$
 (4) $L = \{a^{2m} b^n c^n \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

(علوم کامپیوتر - 91)

34- کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر زبان L مستقل از متن باشد زبان L^* لزوماً مستقل از متن نیست.
 (۲) اگر زبان L و متمم آن L^c هر دو مستقل از متن باشند آنگاه L لزوماً منظم نیست.
 (۳) اگر L منظم باشد آنگاه هر $w \in L$ را می‌توان به صورت $w = xyz$ نوشت به طوری که برای هر n صحیح: $xy^n z \in L$.
 (4) گرامرهای مستقل از متن نمی‌توانند دارای قانونی به صورت $X \rightarrow \lambda$ باشند که در آن X یک متغیر است.

35- زبان L به صورت زیر تعریف شده است:

$$L = \{a^i b^j x^j d^j : i, j \geq 0\} \subseteq \{a, b, c, d\}^*$$

(علوم کامپیوتر - 89)

کدام گزینه صحیح است؟

- (1) L خطی است.
- (2) L منظم است.
- (3) L مستقل از متن است ولی خطی نیست.
- (4) L نه خطی و نه مستقل از متن است.

36- عمل بر زدن بر روی زبان‌های L_1 و L_2 به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$S(L_1, L_2) = \{(wv)^* \mid w \in L_1, v \in L_2\}$$

(مهندسی کامپیوتر - 84)

کدام گزاره صحیح است؟

- (1) زبان‌های مستقل از متن تحت عمل بر زدن (S) بسته نیستند.
- (2) زبان‌های مستقل از متن تحت عمل بر زدن (S) بسته هستند.
- (3) زبان‌های مستقل از متن تحت عمل بر زدن (S) بسته نیستند ولی زبان‌های منظم تحت آن عمل بسته هستند.
- (4) زبان‌های منظم از متن تحت عمل بر زدن (S) بسته نیستند ولی زبان‌های مستقل تحت آن عمل بسته هستند.

37- اگر L یک زبان مستقل از متن و G یک گرامر برای L باشد (یعنی $L = L(G)$)، آن‌گاه کدام گزاره صحیح است؟

(علوم کامپیوتر - 82)

- (۱) G یک گرامر مستقل از متن است.
- (۲) یک گرامر مستقل از متن برای زبان L^* وجود دارد.
- (۳) G دارای یک گرامر معادل با فرم نرمال چامسکی است.
- (۴) G حتماً یک گرامر غیر مبهم است.

38- فرض کنید CFL مجموعه کلیه زبان‌های Context Free، $L \subseteq \Sigma^*$ یک زبان دلخواه و $F \subseteq \Sigma^*$ یک زبان متناهی باشند. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

(علوم کامپیوتر - 79)

- (1) اگر L منظم باشد آنگاه $L \cap F$, $L \cup F$ و $L - F$ نیز منظم هستند.
- (2) اگر $L \in CFL$ آنگاه $L^* \in CFL$.
- (3) اگر L منظم نباشد آنگاه $L \cap F$, $L \cup F$ و $L - F$ نیز منظم نیستند.
- (4) اگر $L \in CFL$ آنگاه $L \cap F \in CFL$.

39- گرامر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} G : S &\rightarrow XY \\ X &\rightarrow 0X \mid \lambda \\ Y &\rightarrow 1Y \mid \lambda \end{aligned}$$

(علوم کامپیوتر - 85)

همه گزاره‌های زیر صحیح‌اند به جز:

- (۱) $L(G)$ مستقل از متن است.
- (۲) $w \in L(G)$ تصمیم‌پذیر نیست.
- (۳) $L(G)$ منظم است.
- (۴) $L(G)$ اشتراک دو زبان مستقل از متن است.

40- کدام یک از مسائل زیر تصمیم‌پذیر (decidable) است؟ (مهندسی کامپیوتر - 82)

- الف) زبان منظم R و عدد صحیح ثابت n مفروض است. آیا R دارای رشته‌ای به طول دقیقاً n است؟
 ب) زبان مستقل از متن C و عدد صحیح ثابت n مفروض است. آیا C دارای رشته‌ای به طول دقیقاً n است؟
 (۱) ب تصمیم‌پذیر است.
 (۲) الف تصمیم‌پذیر است.
 (۳) هر دو مسأله تصمیم‌پذیرند.
 (۴) هیچ یک از دو مسأله تصمیم نیستند.

41- اگر $w \in \Sigma^*$ و G یک گرامر Context Free روی Σ باشند، آنگاه کدام یک نادرست است؟ (علوم کامپیوتر - 79)

- (۱) برای تشخیص $L(G) = \Sigma^*$ الگوریتمی وجود ندارد.
 (۲) برای تشخیص $L(G) = \emptyset$ الگوریتمی وجود دارد.
 (۳) برای تشخیص $w \in L(G)$ الگوریتمی وجود دارد.
 (۴) برای تشخیص $|L(G)| < \infty$ الگوریتمی وجود ندارد.

42- کدام عبارت صحیح است؟ (علوم کامپیوتر - 96)

- (۱) زبان‌های نامنظم تحت مکمل بسته هستند و زبان‌های غیرمستقل از متن تحت مکمل بسته هستند.
 (۲) زبان‌های نامنظم تحت مکمل بسته هستند و زبان‌های غیرمستقل از متن تحت مکمل بسته نیستند.
 (۳) زبان‌های نامنظم تحت مکمل بسته نیستند و زبان‌های غیرمستقل از متن تحت مکمل بسته هستند.
 (۴) زبان‌های نامنظم تحت مکمل بسته نیستند و زبان‌های غیرمستقل از متن تحت مکمل بسته نیستند.

43- رشته x شامل زیر دنباله y است هرگاه حروف y با همان ترتیب ولی نه لزوماً پشت سر هم در x آمده باشند و به صورت $y \subset x$ نشان داده شود. کدام گزینه در مورد زبان L' که به ازای زبان منظم L به صورت زیر تعریف می‌شود صحیح است؟

$$L' = \{x \mid \exists y \in L, y \subset x\}$$

(علوم کامپیوتر - 96)

- (۱) L' همواره مستقل از متن است ولی لزوماً منظم نیست.
 (۲) L' منظم است.
 (۳) فقط در صورتی که L متناهی باشد L' منظم است.
 (۴) L' ممکن است مستقل از متن نباشد.

پاسخ‌ها

فصل 8: خصوصیات بستاری زبان‌های مستقل از متن

تست 17 تا 43

17- گزینه (1) صحیح است.

"نامعین" یعنی "غیرقطعی".

زبان L مستقل از متن است؛ پس PDA غیرقطعی دارد. ابه دلیل تمایز الفباهای c و d می‌توان برای L یک گرامر غیرمبهم نوشت و ماشین پشته‌ای قطعی یافت. پس L مستقل از متن قطعی است اما زبان‌های مستقل از متن قطعی تحت همومرفیسم بسته نیستند. اگر هم‌ریختی h هر دو الفبای c و d را به الفبای d تبدیل کند ماشین پشته‌ای قطعی ندارد.

18- گزینه (3) صحیح است.

زبانی نامتناهی با توان‌های غیرخطی $n^2, 2^n, n!$ مستقل از متن نیست. و منظم نیست اما گزینه ۳ اجتماع دو زبان منظم است: یکی توان‌های اول کمتر از 100 و دومی همه توان‌های بزرگتر مساوی 100:

$$L = L_1 \cup L_2 \quad \begin{cases} L_1 = \{a^{\text{prime}} \mid 1 < \text{prime} < 100\} \\ L_2 = \{a^n \mid n \geq 100\} \end{cases}$$

پس منظم است. هر زبان منظم لزوماً یک زبان مستقل از متن است.

توجه: مجموعه همه توان‌های اول: $L = \{a^n \mid n \text{ is prime}\}$ منظم نیست. اول بودن، یک شرط غیرخطی است.

توجه: اگر زبان تک الفبایی مستقل از متن باشد، لزوماً منظم است.

19- گزینه (1) صحیح است.

با توجه به ضابطه f ، زبان L برابر $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1 \pmod{5}\}$ است. این زبان نامتناهی است؛ پس گزینه ۲ نادرست است. از طرفی این زبان منظم است پس مستقل از متن است؛ بنابراین گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست هستند و گزینه ۱ صحیح است.

20- گزینه (3) صحیح است.

یادآوری می‌شود که اگر زبان تک الفبایی مستقل از متن باشد، لزوماً منظم است. پس گزینه ۳ صحیح است. توابع محاسبه‌پذیر و صعودی مثل $f(n) = n^2, f(n) = 2^n$ داریم که L_f نامنظم است، پس مستقل از متن نیست. این زبان‌ها حساس به متن هستند.

21- گزینه (1) صحیح است.

در گزینه ۱ تساوی هم زمان سه تا از توان‌ها باعث می‌شود زبان مستقل از متن نباشد گزینه ۱ حساس به متن است. گزینه ۲ منظم است؛ پس مستقل از متن است. گزینه‌های ۳ و ۴ مستقل از متن هستند ولی منظم نیستند.

22- گزینه (3) صحیح است.

گزینه ۱ به لم تزریق زبان‌های مستقل از متن اشاره می‌کند. اگر زبانی مستقل از متن باشد، گزینه یک در موردش صدق می‌کند. گزینه ۲ به لم تزریق زبان‌های منظم اشاره می‌کند اگر زبانی منظم و نامتناهی باشد، گزینه دو در موردش صدق می‌کند. گزینه ۳ شرط کافی برای اثبات آن است که زبان L مستقل از متن نیست. اگر گزینه ۳ برقرار باشد، زبان L مستقل از متن نیست در نتیجه، منظم نیز نمی‌تواند باشد. پس گزینه ۳ جواب است.

23- گزینه (3) صحیح است.

گرامر G مستقل از متن و تک الفبایی است. پس $L(G)$ زبانی مستقل از متن است و تک الفبایی است. چنین زبانی باید منظم باشد.

24- گزینه (4) صحیح است.

در زبان L_1 ، رابطه توان‌ها به گونه‌ای است که برای ماشین پشته‌ای قابل محاسبه باشد. L_2 و L_4 نیز هر کدام یک محدودیت خطی دارند و می‌توان برای آنها ماشین پشته‌ای طراحی کرد؛ پس L_1 ، L_2 و L_4 مستقل از متن هستند. اما L_3 دو محدودیت خطی دارد و این محدودیت‌ها به گونه‌ای هستند که با ماشین پشته‌ای قابل محاسبه نیستند؛ پس L_3 مستقل از متن نیست.

$$a^n b^j a^k c^l \quad n \leq k, j \leq l$$

25- گزینه (1) صحیح است.

زبان L_1 را می‌توان چنین نوشت: $L_1 = \{a^n b^m c^j : m = n, n \leq j\}$ پس این زبان در واقع دو محدودیت خطی دارد که ماشین پشته‌ای توان محاسبه توام آنها را ندارد. L_1 حساس به متن است ولی مستقل از متن نیست. برای زبان L_2 به سادگی می‌توان ماشین پشته‌ای طراحی کرد؛ پس L_2 مستقل از متن است.

26- گزینه (3) صحیح است.

زبان L_1 را می‌توان چنین نوشت:

$$L_1 = \{a^n b^m c^n : n \geq m \geq 0\} = \{a^n b^m c^k : k = n, n \geq m \geq 0\}$$

دو محدودیت خطی این زبان به گونه‌ای است که ماشین پشته‌ای توان محاسبه توام آنها را ندارد. L_1 حساس به متن است ولی مستقل از متن نیست. زبان L_2 و L_3 را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$L_2 = \{a^n b^n c^m : n, m \geq 0\}$$

$$L_3 = \{a^n b^m c^n : n, m \geq 0\}$$

می‌بینیم که برای زبان‌های L_2 و L_3 می‌توان ماشین پشته‌ای یا گرامر مستقل از متن طراحی کرد؛ پس این دو زبان از نوع مستقل از متن هستند.

27- گزینه (2) صحیح است.

زبان $L' = \{w \in L \mid w = w^R\}$ اشتراک زبان منظم $L = L((0+01)^*)$ و زبان مستقل از متن $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$ (رشته‌های آینه‌ای) است. زبان‌های مستقل از متن تحت اشتراک منظم بسته هستند، پس $L' = L_1 \cap L$ مستقل از متن است. اما با استفاده از لم تزریق زبان‌های منظم ثابت می‌کنیم که L' منظم نیست. برای هر عدد طبیعی n رشته $w = 0^n (01)^n 0^{n+1} \in L'$ را با طول بیشتر از n در نظر بگیریم. این رشته را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$w = 0^n (01)^n 0^{n+1} = \underbrace{0^m 0^k}_{xy} \underbrace{0^{n-m-k} (01)^n 0^{n+1}}_z$$

فرض می‌کنیم $|y| = k + m \leq n$ و $|x| = k \geq 1$ تا شرایط لم تزریق برقرار شود. حالا به ازای صفر بار تکرار y داریم:

$$w_0 = xy^0z = xz = 0^m 0^{n-m-k} (01)^n 0^{n+1} = 0^{n-k} (01)^n 0^{n+1} \notin L'$$

w_0 آینه‌ای نیست به همین دلیل عضو L' نیست. این ثابت می‌کند که L' منظم نیست.

28- گزینه (4) صحیح است.

زبان‌های مستقل از متن تحت اجتماع بسته‌اند، پس اگر اجتماع یک زبان مستقل از متن با زبان L مستقل از متن نباشد، معلوم می‌شود L مستقل از متن نیست؛ پس شرط (ب) یک شرط کافی برای مستقل از متن نبون L است ولی شرایط (الف) و (ج) شرط کافی نیستند. اشتراک زبان $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ با زبان منظم $(a+b)^*$ ، برابر L است. این اشتراک منظم نیست اما زبان L مستقل از متن است. اشتراک زبان $L = \{a^n b^m c^k \mid n = m\}$ با زبان مستقل از متن $\{a^n b^m c^k \mid k = m\}$ ، برابر است با $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. این اشتراک مستقل از متن نیست اما زبان L مستقل از متن است.

29- گزینه (1) صحیح است.

هر سه زبان L_1 ، L_2 و L_3 مستقل از متن هستند. اشتراک این سه زبان برابر زبان $\{a^n b^n a^n b^n \mid n \geq 0\}$ است و این زبان مستقل از متن نیست.

30- گزینه (1) صحیح است.

دو زبان مستقل از متن قطعی زیر را در نظر بگیرید:

$$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

$$L_2 = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 1\}$$

هر دو زبان فوق مستقل از متن قطعی هستند ولی اجتماع آن‌ها قطعی نیست. پس گزینه ۱ صحیح است.

31- گزینه (2) صحیح است.

اگر $\lambda \notin L$ ، می‌توان یک گرامر مستقل از متن غیرانقباضی مانند G برای زبان L داشت. تعداد غیرپایانه‌ها (متغیرها) در گرامر G متناهی است؛ برای هر رشته که طول آن از تعداد غیرپایانه‌ها بیشتر باشد، واضح است که در مسیر اشتقاق از نماد شروع S تا تولید آن رشته حداقل یک غیرپایانه تکرار می‌شود. بنابراین در مورد زبان‌های مستقل از متن ثابت لم تزریق تعداد غیرپایانه‌ها است.

32- گزینه (4) صحیح است.

درگزینه ۱ با حالت بندی $n \geq m$ یا $m > n$ خواهیم داشت: $k = n - m$ یا $k = m - n$ پس:

$$L = \{a^n b^m c^k \mid k = |n - m|\} = \{a^n b^m c^k \mid n = m + k\} \cup \{a^n b^m c^k \mid m = n + k\}$$

این زبان اجتماع دو زبان مستقل از متن است پس مستقل از متن است. گزینه ۲ هم اجتماع دو زبان مستقل از متن است:

$$L = \{a^n b^m c^k : n = m\} \cup \{a^n b^m c^k : m \leq k\}$$

پس مستقل از متن است. گزینه ۳ محدودیت غیرخطی $k = mn$ دارد این زبان مستقل از متن نیست.

33- گزینه (2) صحیح است.

اشتراک داده شده گزینه 1 برابر $\{a^{2n}b^{2n}c^{2m} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$ است فقط یک رابطه خطی بین تعداد a و b ها دارد پس مستقل از متن است. گزینه‌های 3 و 4 نیز به دلایل مشابه مستقل از متن هستند. اما گزینه 2 برابر $\{a^mb^{2m}c^{4m} \mid m \geq 0\}$ است دو شرط خطی توأم دارد (ارتباط خطی بین سه توان) پس حساس به متن است و مستقل از متن نیست.

34- گزینه (2) صحیح است.

زبان‌های مستقل از متن تحت عمل بستار ستاره بسته‌اند؛ پس گزینه ۱ نادرست است. (در گزینه ۳ شرط نامتناهی بودن ذکر نشده پس درست نیست البته معلوم است که شرط $y \neq \lambda$ در نوشتن این گزینه فراموش شده است). گرامرهای مستقل از متن، می‌توانند قاعده تولید تهی داشته باشند. پس گزینه ۴ نادرست است. گزینه 2 درست است زبان‌هایی مانند $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ وجود دارند که L و $\bar{L}$ هر دو مستقل از متن بوده ولی نامنظم هستند.

35- گزینه (3) صحیح است.

بین توان‌ها رابطه خطی وجود دارد پس زبان L نامنظم است. در واقع این زبان الحاق دو زبان مستقل از متن است:

$$L = \{a^i b^j c^j d^j \mid i, j \geq 0\} = \{a^i b^i \mid i \geq 0\} \cdot \{c^j d^j \mid j \geq 0\}$$
 پس مستقل از متن است. البته پشته 2 بار پر و خالی می‌شود و این زبان ماشین پشته‌ای یک نوبته ندارد پس خطی نیست.

36- گزینه (2) صحیح است.

زبان‌های مستقل از متن و همچنین زبان‌های منظم تحت عمل بر زدن بسته هستند. پس گزینه ۲ صحیح است. می‌توانیم از ویژگی‌های بستاری نیز استفاده کنیم. $S(L_1, L_2) = (L_1 L_2)^*$ است. زبان‌های مستقل از متن (همچنین زبان‌های منظم) تحت الحاق و بستار ستاره بسته‌اند؛ پس تحت عمل بر زدن بسته هستند.

37- گزینه (2) صحیح است.

L زبان مستقل از متن است پس حتماً گرامر مستقل از متن نیز دارد اما نمی‌توان گفت همه گرامرهای آن مستقل از متن هستند. پس گزینه 1 نادرست است. برای $\{ \lambda \} - L(G)$ یک گرامر نرمال چامسکی وجود دارد؛ پس گزینه ۳ نیز نادرست است. گرامر G لزوماً غیر مبهم نیست؛ پس گزینه ۴ نادرست است. گزینه ۲ درست است: L مستقل از متن است پس L^* مستقل از متن است؛ پس برای آن گرامر مستقل از متن وجود دارد.

38- گزینه (3) صحیح است.

هر زبان متناهی منظم است؛ پس F منظم است. زبان‌های منظم تحت اجتماع، اشتراک و تفاضل بسته‌اند؛ پس گزینه ۱ درست است. زبان‌های مستقل از متن تحت بستار ستاره بسته‌اند؛ پس گزینه ۲ درست است. زبان‌های مستقل از متن تحت اشتراک منظم بسته‌اند؛ پس گزینه ۴ نیز درست است. F متناهی است، پس زبان L هر چه باشد، $L \cap F$ متناهی است پس منظم است؛ پس گزینه ۳ نادرست است.

39- گزینه (2) صحیح است.

$L(G)$ برابر $L(0^*1^*)$ است؛ پس زبانی منظم است و هر زبان منظم، مستقل از متن نیز هست؛ پس گزینه‌های 1 و 3 درست هستند. واضح است که $L(G) = L(G) \cap \Sigma^*$ پس گزینه 4 درست است. برای گرامرهای مستقل از متن مسأله عضویت: w در $L(G)$ یک مسئله تصمیم‌پذیر است؛ پس گزینه 2 نادرست است.

40- گزینه (3) صحیح است.

(الف) تصمیم‌پذیر است: زبان منظم R یک پذیرنده dfa دارد. در گراف انتقال آن می‌توان تعیین کرد آیا از حالت اولیه به یک حالت نهایی مسیری به طول n وجود دارد یا خیر؟ مسأله (ب) تصمیم‌پذیر است؛ مجموعه رشته‌های به طول n یعنی Σ^n یک زبان منظم است اگر C مستقل از متن باشد $C \cap \Sigma^n$ مستقل از متن است. پس این مسأله که آیا $C \cap \Sigma^n$ تهی است یا خیر؟ تصمیم‌پذیر است.

41- گزینه (4) صحیح است.

برای گرامر مستقل از متن G این مسأله که آیا $|L(G)|$ متناهی است یا نامتناهی؟ مسأله‌ای تصمیم‌پذیر است.

42- گزینه (2) صحیح است.

زبان‌های منظم تحت مکمل بسته هستند. L منظم است اگر و تنها اگر $\bar{L}$ منظم باشد. پس L نامنظم است اگر و تنها اگر $\bar{L}$ نامنظم باشد. یعنی زبان‌های نامنظم نیز تحت مکمل بسته هستند. اما زبان‌های مستقل از متن تحت مکمل بسته نیستند در نتیجه زبان‌های غیرمستقل از متن نیز تحت مکمل بسته نیستند. برای مثال زبان $a^n b^n c^n$ مستقل از متن نیست اما مکمل آن مستقل از متن است. این مثال معروف در متن کتاب و جزوه درس بررسی شده است.

43- گزینه (2) صحیح است.

زبان L' ، مجموعه همه زیردنباله‌های رشته‌های عضو L است زبان L منظم است، پس یک پذیرنده NFA با فقط یک حالت نهایی دارد. در این ماشین از هر حالت به حالت نهایی انتقال تعریف کنیم ماشین متناهی پذیرنده L' به دست می‌آید. پس L' منظم است.

پایان جلسه هفدهم نکته و تست
پیروز و سربلند باشید.